106 — Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E. Sous-groupes de GL(E). Applications.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

I] Groupe linéaire d'un espace vectoriel

1] Endomorphismes inversibles

Définition 1 : On note $GL(E)$ le groupe des automorphismes de E et $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ [Rom]

Théorème 2 : Soit $u \in End(E)$

Alors : les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $u \in GL(E)$
(2) $ker(u) = \{0\}$
(3) $Im(u) = E$
(4) $rg(u) = n$
(5) $det(u) \neq 0$
(7) u transforme toute base de E en une base de E
(8) il existe $v \in End(E)$ tel que $u \circ v = id$
(6) il existe $v \in End(E)$ tel que $v \circ u = id$

Exemple 3 : Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, l'homothétie $\lambda\, id$ est dans $GL(E)$.

Proposition 4 : Le choix d'une base de E permet de réaliser un isomorphisme d'algèbres de $End(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui induit un isomorphisme de groupes de $GL(E)$ sur $GL_n(\mathbb{K})$.

Théorème 5 : (de décomposition de Bruhat) $GL_n(\mathbb{K}) = \bigsqcup_{\sigma \in S_n} T_S P_\sigma T_S$ avec T_S l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $GL_n(\mathbb{K})$. [Isen]

2] Déterminant et groupe spécial linéaire

Définition 6 : Le groupe spécial linéaire est : $SL(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid det(u) = 1\}$ et $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid det(A) = 1\}$.

Proposition 7 : L'application déterminant est un morphisme de groupes surjectif de $GL(E)$ sur $\mathbb{K}^*$.

Théorème 8 : $SL(E)$ est un sous-groupe distingué de $GL(E)$ et le groupe quotient $GL(E)/SL(E)$ est isomorphe à $\mathbb{K}^*$ et la suite $\{1\} \to SL(E) \to GL(E) \to \mathbb{K}^* \to \{1\}$ est exacte. [Rom]

isomorphe à $SL_n(\mathbb{K})$, le groupe quotient

Exemple 9 : $-id_E \in SL(E)$ ssi n pair

3] Application aux endomorphismes nilpotents

Lemme 10 : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$

Alors : u nilpotente ssi pour tout $p \in [\![1;n]\!]$, $Tr(u^p) = 0$

Théorème 11 : (de Burnside) Soit G sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $A \in G$, $A^N = I_n$

Alors : G est fini [Isen]

II] Étude de GL(E)

1] Endomorphismes remarquables

Définition 12 : Soit $\varphi \in E^*$ non-nulle. On appelle transvection d'hyperplan $ker(\varphi)$ toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par : pour tout $x \in E$, $u(x) = x + \varphi(x)a$ avec $a \in ker(\varphi)$.

On note $\tau_{\varphi,a} = id + \varphi.a$ une telle transvection. [Rom]

Proposition 13 : Soit $\varphi \in E^*$, $H = ker(\varphi)$, $u \in GL(E) \setminus \{id\}$ tel que $u_{|H} = id_H$.

Alors : les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $det(u) = 1$ (i.e. $u \in SL(E)$)
(2) u n'est pas diagonalisable
(3) $Im(u - id) \subset H$
(4) le morphisme $\bar{u} : E/H \to E/H$ est $id_{E/H}$
(5) il existe $a \in H \setminus \{0\}$ tel que pour tout $x \in E$, $u(x) = x + \varphi(x)a$
(6) il existe $\mathcal{B}$ base de E dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$ [Per]

Proposition 14 : Soit $\tau_{\varphi,a}$ transvection de droite $D = \langle a \rangle$ et d'hyperplan $H = ker(\varphi)$ et soit $u \in GL(E)$.

Alors : $u \tau_{\varphi,a} u^{-1}$ est une transvection de droite $u(D)$ et d'hyperplan $u(H)$.

Définition 15 : Soit $\varphi \in E^*$ non-nulle. On appelle dilatation d'hyperplan $ker(\varphi)$ toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par : pour tout $x \in E$, $u(x) = x + \varphi(x) a$ avec $a \in E \setminus ker(\varphi)$. [Rom]

Proposition 16 : Soit $\varphi \in E^*$, $H = ker(\varphi)$, $u \in GL(E)$ tel que $u_{|H} = id_H$

Alors : les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $det(u) = \lambda \neq 1$ (i.e. $u \notin SL(E)$)
(2) u admet une valeur propre $\lambda \neq 1$ et u est diagonalisable
(3) $Im(u - id) \not\subset H$
(4) il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^* \setminus \{1\}$ [Per]

Remarque 17 : Lorsque $\lambda = -1$ et $car(\mathbb{K}) \neq 2$, u est appelée une réflexion.

2] Générateurs de $SL(E)$, $GL(E)$

V.4 [Rom]

Lemme 18: Pour tous $x,y\in E$, il existe $u\in SL(E)$ produit de une ou deux transvections tel que $y=u(x)$.

Lemme 19: Soit H_1, H_2 hyperplans de E et $a\in E\setminus(H_1\cup H_2)$

Alors: (1) $H:=(H_1\cap H_2)\oplus \mathbb{K}a$ est un hyperplan de E.

(2) $E = H + H_1 = H + H_2$

(3) il existe une transvection u telle que $u(a)=a$ et $u(H_1)=H_2$

Théorème 20: Les transvections engendrent $SL(E)$.

Corollaire 21: Les dilatations et les transvections engendrent $GL(E)$.

[Isen]

Application 22: (théorème de Frobenius-Zolotarev) Soit p premier impair, V un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}^*$.

Alors: pour tout $u\in GL(V)$, $\varepsilon(u) = \left(\frac{\det(u)}{p}\right)$

3] Cas des corps finis

V.6 [Rom]

Pour cette partie, $\mathbb{K}=\mathbb{F}_q$ avec $q=p^\alpha$ et p premier.

Proposition 23: (1) $|GL(E)| = \prod_{k=1}^{n}(q^n-q^{k-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{k=1}^{n}(q^k-1)$

(2) $|SL(E)| = q^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(q^n-q^{k-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{k=2}^{n}(q^k-1)$

Proposition 24: Soit $T_n(\mathbb{F}_p)$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de termes diagonaux 1 de $GL_n(\mathbb{F}_p)$.

Alors: $T_n(\mathbb{F}_p)$ est un sous-groupe de cardinal $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$ de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ et même un p-Sylow de $GL_n(\mathbb{F}_p)$.

Application 25: (théorème de Sylow) Soit G groupe d'ordre $p^\alpha m$ avec p premier et $p\nmid m$.

Alors: il existe un p-sous-groupe de Sylow de G.

III] Sous-groupe des endomorphismes orthogonaux

1] Isométries d'un espace euclidien

XXII.3 [Rom]

Par la suite, E désigne un espace euclidien de dimension $n\in\mathbb{N}^*$.

Définition 26: Une isométrie (ou application orthogonale) de E est une application $u: E\to E$ qui conserve le produit scalaire i.e. telle que pour tous $x,y\in E$, $\langle u(x)\,|\,u(y)\rangle = \langle x\,|\,y\rangle$.

XXII.3 [Rom]

Exemples 27: (1) Les seules homothéties $x\mapsto\lambda x$ qui sont des isométries sont Id et $-Id$

(2) Pour E de dimension 1, $O(E)=\{-Id; Id\}$

Théorème 28: $u\in O(E)$ ssi u linéaire et pour tout $x\in E$, $\|u(x)\|=\|x\|$

Contrexemple 29: L'hypothèse de linéarité est vitale.
Soit $u: x\mapsto \|x\|e$ avec $e\in E$ tel que $\|e\|=1$ conserve la norme mais n'est pas une isométrie.

Remarque 30: Pour tout $u\in O(E)$, $Spec(u)\subset\{-1;1\}$.

Théorème 31: Toute isométrie est un automorphisme de E et $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

2] Structure de $O(E)$

XXII.3 [Rom]

Proposition 32: Soit $\mathcal{B}=(e_i)_{i=1}^n$ base orthonormée de E et $u\in\mathcal{L}(E)$.

Alors: $u\in O(E)$ ssi $u(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E.

Proposition 33: En reprenant les notations précédentes, soit $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$

Alors: $u\in O(E)$ ssi ${}^tAA = A{}^tA = I_n$

Théorème 34: $O(E)$ est une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$.

3] Réduction des endomorphismes normaux

XXII.10 [Rom]

Définition 35: Pour E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, soit $u\in\mathcal{L}(E)$.
On dit que u est normal si $u^*\circ u = u\circ u^*$

Exemple 36: Les isométries sont des endomorphismes normaux.

Lemme 37: Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ endomorphisme normal et F sous-espace vectoriel de E stable par u.

Alors: $F^\perp$ est stable par u

Lemme 38: Soit $u\in\mathcal{L}(E)$.

Alors: il existe un sous-espace vectoriel P de E de dimension 1 ou 2 stable par u

Lemme 39: Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ endomorphisme normal.

Alors: il existe des sous-espaces vectoriels $P_1,\dots,P_r$ de E de dimensions 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, stables par u tels que: $E=\bigoplus_{j=1}^{r} P_j$

[Rom] XXII.10

Théorème 40 : (réduction des endomorphismes normaux)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ endomorphisme normal.
Alors : il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D_p & & & (0) \\ & R_1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & R_r \end{pmatrix}$$ avec D_p matrice diagonale,
$R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$ et $a_k \neq 0$ tels que $p+2r=n$.

4) Application aux jeux-vidéos

[Isen]

Définition 41 : Le corps gauche des quaternions $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre non-commutative engendrée par i, j, k tels que $i^2=j^2=k^2=-1$
$ij=k$; $jk=i$; $ki=j$.
La norme d'un quaternion $q=a+ib+jc+kd$ est : $N(q)=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$

Propriétés 42 : Soit $Sp(1)=\{q\in\mathbb{H} \mid N(q)=1\}$
Alors : (1) $2\,\mathrm{Re}(q)=q+\overline{q}$ et $\overline{q_1 q_2}=\overline{q_2}\,\overline{q_1}$
(2) $N(q)^2=q\overline{q}$
(3) $Z(\mathbb{H})=\mathbb{R}$ et $Z(\mathbb{H})\cap Sp(1)=\{\pm1\}$

Lemme 43 : La sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.
En particulier, $Sp(1)$ est connexe par arcs.

Théorème 44 : (admis) $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements (ie par les symétries orthogonales par rapport à une droite).

Théorème 45 : $SO_3(\mathbb{R})$ est isomorphe à $Sp(1)/\{\pm1\}$

Références :
[Rom] Mathématiques pour l'agrégation Algèbre et Géométrie - Rombaldi
[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann
[Per] Cours d'algèbre - Perrin